Система с гамильтонианом H не может иметь СРЕДНЕЕ значение энергии E, если это не СЗ гамильтониана.

ЭТО НЕПРАВДА!!!!! Да, это так, если ВФ является СФ гамильтониана, тогда её энергия – СЗ. Но ВФ может быть линейной комбинацией нескольких ВФ, и тогда её энергия будет линейной комбинацией СЗ. И прямо сейчас мы решим задачу на эту тему.

Решим задачу (предлагалась на зачёте по атомке Олевановым): энергия гармонического осциллятора 2hw/3. Приведите хоть одну ВФ, для которой это возможно.

Решение:

$$\frac{\hbar\omega}{2},\quad \frac{3\hbar\omega}{2},\quad \frac{5\hbar\omega}{2},\ \ldots$$

$$\varphi_0 \qquad \varphi_1 \qquad \varphi_2$$

Уровни энергии в гарм.осцилляторе:

Сверху – значения энергий (СЗ гамильтониана) с собственными ВФ φ0, φ1, φ2…

Попытаемся сконструировать искомую ВФ из φ0, φ1, т.е. будем её искать в виде C0*φ0+C1*φ1.

Во-первых, из нормировки должно быть $C0^2+C1^2=1$

Во-вторых, надо использовать условие на среднее значение энергии.

$$\Psi = C_0\varphi_0 + C_1\varphi_1 \qquad E_0 = \hbar\omega/2$$

$$\hat{H}\Psi = C_0E_0\varphi_0 + C_1E_1\varphi_1 \qquad E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$$

Очень классно действовать гамильтонианом на ВФ, уже разложенную по СФ гамильтониана: просто надо домножить каждое слагаемое на его СЗ.

Теперь считаем среднее значение энергии:

$$\langle E\rangle = \langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle = \langle C_0\varphi_0 + C_1\varphi_1 | C_0E_0\varphi_0 + C_1E_1\varphi_1\rangle$$

Раскрывая скобки Дирака, получим четыре произведения

$$\langle C_0\varphi_0|C_0E_0\varphi_0\rangle + \langle C_0\varphi_0|C_1E_1\varphi_1\rangle +$$

$$\langle C_1\varphi_1|C_0E_0\varphi_0\rangle + \langle C_1\varphi_1|C_1E_1\varphi_1\rangle$$

Но два их занулятся в виду ортогональности ВФ. Оставшиеся два будут

$$C_0^2E_0\overset{=1}{\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle} + C_1^2E_1^2\overset{=1}{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} c_0^2 + c_1^2 = 1 \\ c_0^2 \cdot \frac{\hbar\omega}{2} + c_1^2 \cdot \frac{3\hbar\omega}{2} = \frac{2\hbar\omega}{3} \end{cases}$$

Решаем её:

$$\begin{cases} c_0^2 + c_1^2 = 1 \\ \frac{c_0^2}{2} + \frac{3c_1^2}{2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow c_0^2 + 3c_1^2 = 4/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0^2 = 1 - c_1^2 \\ 2c_1^2 = 1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0^2 = 5/6 \\ c_1^2 = 1/6 \end{cases}$$

$$\psi = \frac{5}{6} c_0 \varphi_0 + \frac{1}{6} c_1 \varphi_1$$

Перед каждым слагаемым мы вправе подставить знак минус, так что у нас четыре возможных ВФ.

Так почему же мы в спектрографе видим дискретные линии?
Потому что когда вы ИЗМЕРЯЕТЕ, система автоматически приводится к одной из СФ вашего оператора.
А пока вы не измерили, энергия может быть какой угодно. Это вы её своим измерением изменили!

Итак: спектр ИЗМЕРЯЕМЫХ значений энергии дискретен,
спектр СРЕДНИХ – непрерывен. Как и в классике.